

Lecția 4: Aria și Divizarea Terenurilor - Formule și Metode Practice

Obiective: Elevii vor calcula arii pentru terenuri de forme complexe folosind formule specializate și vor înțelege metode matematice de împărțire echitabilă a terenurilor.

I. PARTEA TEORETICĂ

1. Importanța Calculului Corect al Ariei în Cadastru

De ce este aria atât de importantă?

- Baza impozitelor pe teren
- Valoarea de piață a proprietății
- Dreptul de construcție (indicele de folosință)
- Planificarea agricolă (randament estimat)
- Diviziuni moștenire (partaj corect)

Problema majoră: Terenurile reale nu sunt perfect dreptunghiulare sau triunghiulare!

2. Formula lui Heron - Pentru Triunghiuri Oarecare

Situația: Cunoaștem lungimile celor trei laturi (a, b, c), dar nu știm înălțimile sau unghiurile.

Formula lui Heron:

1. Calculează semiperimetrul: $s = \frac{a + b + c}{2}$

2. Aria: $A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

Demonstrație geometrică: Heron din Alexandria (cca. 10–70 d.Hr.) a demonstrat această formulă ingenioasă care elimină nevoia de unghiuri.

Heron's Formula

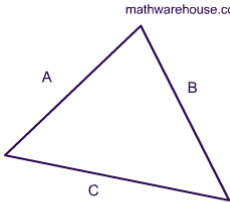
$$S = \frac{A + B + C}{2}$$

$$\text{Area} = \sqrt{S(S - A)(S - B)(S - C)}$$

Figura 1: Ilustrație geometrică pentru formula lui Heron.

Exemplu numeric rapid: Triunghi cu laturile 13m, 14m, 15m:

$$s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84 \text{ m}^2$$

3. Formula Coordonatelor (Metoda șiretului) - Pentru Poligoane Oarecare

Situația: Avem un poligon cu n laturi, cunoaștem coordonatele tuturor vârfurilor

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Formula Gauss pentru arie:

$$A = \frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \dots + y_nx_1)|$$

Regula mnemonică: „Suma produselor în cruce, minus cealaltă sumă în cruce, totul pe doi, în valoare absolută”.

Metodă tabelară pentru aplicare:

Vârf	x	y	Produs 1 ($x_i \cdot y_{i+1}$)	Produs 2 ($y_i \cdot x_{i+1}$)
A	0	0	$0 \cdot 2 = 0$	$0 \cdot 4 = 0$
B	4	0	$4 \cdot 3 = 12$	$0 \cdot 4 = 0$
C	4	2	$4 \cdot 0 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$
D	0	3	$0 \cdot 0 = 0$	$3 \cdot 0 = 0$
A (reluat)	0	0	–	–
SUME	–	–	12	0

$$A = \frac{1}{2} |12 - 0| = 6 \text{ unități}^2$$

Aplicație în era digitală: Această formulă este implementată în toate softurile CAD și GIS pentru calcul automat al ariei!

4. Metode de Împărțire a Terenurilor

A) Împărțirea prin Linie Prin Vârf

Divizarea unui triunghi în două părți de arii proporționale printr-o linie care trece printr-un vârf.

Regula: Dacă dorim raportul ariilor $p_1 : p_2$, atunci punctul de pe latura opusă împarte latura în același raport.

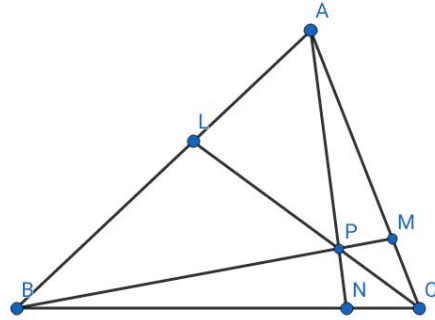


Figura 2: Împărțirea triunghiului prin linie care trece prin vârf.

B) Împărțirea prin Linie Paralelă cu o Latură

Divizarea unui triunghi în două părți printr-o linie paralelă cu una dintre laturi.

Teorema fundamentală: Dacă $MN \parallel BC$ în triunghiul ABC , atunci:

$$\frac{A_{AMN}}{A_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AN}{AC}\right)^2$$

Raportul liniilor = $\sqrt{\text{raportul ariilor}}$.

Exemplu: Pentru a împărți un teren triunghiular în două părți egale printr-o linie paralelă cu baza, linia trebuie trasată la

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$$

din înălțime, măsurat de la vârf.

C) Împărțirea Poligoanelor Complexe

Pentru poligoane cu mai mult de 3 laturi, metoda generală este:

- Împărțim poligonul în triunghiuri
- Aplicăm metodele de împărțire pentru fiecare triunghi
- Combinăm rezultatele

5. Aplicații Practice în Cadastru și Moșteniri

Caz real 1 - Moștenirea unui teren triunghiular:

Terenul ABC are arie 2400 m^2 . Trei frați trebuie să primească părți proporționale cu vârsta: 1:2:3.

- Se împarte prima dată în raport $1:(2+3) = 1:5$ printr-o linie prin A
- Apoi partea mai mare se împarte în raport 2:3 printr-o linie prin B

Caz real 2 - Exproprierea parțială pentru drum:

Un drum nou taie un colț dintr-un teren dreptunghiular. Cum calculăm compensația?

- Calculăm aria porțiunii expropriate (triunghiulară)
- Aplicăm valoarea pe m² stabilită legal
- Terenul rămas este un pentagon - îi recalculăm aria

II. EXEMPLU REZOLVAT COMPLET

Problema: Un teren are forma unui patrulater convex $ABCD$ cu coordonatele:

$$A(0, 0), B(40, 0), C(50, 30), D(20, 40)$$

Terenul aparține unei familii cu 4 copii și trebuie împărțit în 4 părți egale printr-o linie care unește mijloacele a două laturi opuse, iar apoi fiecare parte se împarte la rândul ei prin linii paralele.

Cerințe:

- 1) Calculează aria totală a terenului
- 2) Determină ecuația dreptei care împarte terenul în două părți egale
- 3) Pentru una dintre jumătăți, calculează cum trebuie împărțită în două sferturi printr-o linie paralelă cu baza

REZOLVARE DETALIATĂ:

Pasul 1: Calculul ariei totale cu formula coordonatelor

Vârf	x	y	$x_i y_{i+1}$	$y_i x_{i+1}$
A	0	0	$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 40 = 0$
B	40	0	$40 \cdot 30 = 1200$	$0 \cdot 50 = 0$
C	50	30	$50 \cdot 40 = 2000$	$30 \cdot 20 = 600$
D	20	40	$20 \cdot 0 = 0$	$40 \cdot 0 = 0$
A (reluat)	0	0	–	–
SUME	–	–	3200	600

$$A_{total} = \frac{1}{2} |3200 - 600| = \frac{1}{2} \cdot 2600 = 1300 \text{ m}^2$$

Pasul 2: Împărțirea în două părți egale

O metodă sigură: unim mijloacele a două laturi opuse.

Mijloacele laturilor:

$$M = \text{mijlocul lui } AB = \left(\frac{0 + 40}{2}, \frac{0 + 0}{2} \right) = (20, 0)$$

$$N = \text{mijlocul lui } CD = \left(\frac{50 + 20}{2}, \frac{30 + 40}{2} \right) = (35, 35)$$

Dreapta MN împarte patrulaterul în două patrulatere: $A-M-N-D$ și $M-B-C-N$.

Pasul 3: Împărțirea unei jumătăți în două sferturi

Luăm patrulaterul $A-M-N-D$. Aria acestuia $\approx 650 \text{ m}^2$ (jumătate din total). Pentru două părți egale: 325 m^2 fiecare, printr-o linie paralelă cu baza.

Pentru o împărțire perfect în 4 părți egale, metoda optimă:

- Unim mijloacele laturilor opuse (avem deja)
- În fiecare patrulater rezultat, unim mijlocul diagonalei cu mijlocul laturii opuse

Răspuns final:

- Aria totală = 1300 m^2
- Dreapta de împărțire în jumătăți: trece prin $M(20, 0)$ și $N(35, 35)$
- Pentru împărțirea în sferturi: în fiecare jumătate, unim mijlocul diagonalei cu mijlocul laturii opuse

III. SET DE 10 EXERCII PENTRU LECTIE (cu rezolvări complete)

Exercițiul 1 (Formula lui Heron)

Enunț: Calculează aria unui teren triunghiular cu laturile 17 m, 25 m și 28 m.

Rezolvare:

$$s = \frac{17 + 25 + 28}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \sqrt{35(35 - 17)(35 - 25)(35 - 28)} = \sqrt{35 \cdot 18 \cdot 10 \cdot 7}$$

$$35 \cdot 18 = 630, \quad 630 \cdot 10 = 6300, \quad 6300 \cdot 7 = 44100, \quad \sqrt{44100} = 210 \Rightarrow A = 210 \text{ m}^2$$

Exercițiul 2 (Verificare triunghi dreptunghic)

Enunț: Un triunghi dreptunghic are catetele de 9 m și 12 m. Calculează aria prin două metode și verifică cu formula lui Heron.

Rezolvare:

Metoda 1 (directă):

$$A = \frac{9 \cdot 12}{2} = \frac{108}{2} = 54 \text{ m}^2$$

Metoda 2 (Heron):

$$c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

$$s = \frac{9 + 12 + 15}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$A = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2916} = 54 \text{ m}^2 \checkmark$$

Exercițiul 3 (Formula coordonatelor pentru pătrat)

Enunț: Pentru un pătrat cu vârfurile (0,0), (5,0), (5,5), (0,5), calculează aria cu formula coordonatelor.

Rezolvare tabelară:

Vârf	x	y	$x \cdot y_{next}$	$y \cdot x_{next}$
A(0,0)	0	0	$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 5 = 0$
B(5,0)	5	0	$5 \cdot 5 = 25$	$0 \cdot 5 = 0$
C(5,5)	5	5	$5 \cdot 5 = 25$	$5 \cdot 0 = 0$
D(0,5)	0	5	$0 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 0 = 0$
A(0,0)	–	–	–	–
Sume	–	–	50	0

$$A = \frac{1}{2}|50 - 0| = 25 \text{ unități}^2$$

Important: Nu uitați ultimele produse $x_n y_1$ și $y_n x_1$!

Exercițiul 4 (Împărțire proporțională)

Enunț: Un teren de 2400 m² trebuie împărțit în trei părți cu raportul 2:3:4. Care este aria fiecărei părți?

Rezolvare:

$$2 + 3 + 4 = 9, \quad \frac{2400}{9} = 266.67$$

$$A_1 = 2 \cdot 266.67 = 533.33, \quad A_2 = 3 \cdot 266.67 = 800.00, \quad A_3 = 4 \cdot 266.67 = 1066.67$$

Verificare: $533.33 + 800 + 1066.67 = 2400 \checkmark$

Exercițiul 5 (Dreptunghi împărțit pe diagonală)

Enunț: Un teren dreptunghiular de 30 m $\times$ 20 m se împarte printr-o diagonală. Care este aria fiecărui triunghi?

Rezolvare:

$$A_{tot} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ m}^2, \quad A_{triunghi} = 600/2 = 300 \text{ m}^2$$

Exercițiul 6 (Împărțire cu linie perpendiculară)

Enunț: Dacă la exercițiul 5 plasăm un punct E pe latura lungă, la 10 m de colț, și trasăm o linie perpendiculară pe latura lungă, care este aria părții mai mici?

Rezolvare: Forma obținută este un trapez dreptunghic.

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(30 + 10) \cdot 20}{2} = \frac{800}{2} = 400 \text{ m}^2$$

Exercițiul 7 (Verificare triunghi 7-24-25)

Enunț: Verifică formula lui Heron pentru un triunghi cu laturile 7 m, 24 m, 25 m (triunghi dreptunghic).

Rezolvare:

$$s = \frac{7 + 24 + 25}{2} = 28$$

$$A = \sqrt{28(28 - 7)(28 - 24)(28 - 25)} = \sqrt{28 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{7056} = 84 \text{ m}^2$$

Verificare directă: $(7 \cdot 24)/2 = 84 \text{ m}^2 \checkmark$

Exercițiul 8 (Poligon cu 5 laturi)

Enunț: Un teren pentagonal are coordonatele (0,3), (4,1), (6,5), (3,7), (-1,6). Creează un tabel pentru formula coordonatelor.

Rezolvare tabelară:

Vârf	x	y	$x \cdot y_{next}$	$y \cdot x_{next}$
A	0	3	$0 \cdot 1 = 0$	$3 \cdot 4 = 12$
B	4	1	$4 \cdot 5 = 20$	$1 \cdot 6 = 6$
C	6	5	$6 \cdot 7 = 42$	$5 \cdot 3 = 15$
D	3	7	$3 \cdot 6 = 18$	$7 \cdot (-1) = -7$
E	-1	6	$(-1) \cdot 3 = -3$	$6 \cdot 0 = 0$
A	0	3	—	—
Sume	—	—	77	26

$$A = \frac{1}{2}|77 - 26| = \frac{1}{2} \cdot 51 = 25.5 \text{ unități}^2$$

Exercițiul 9 (Împărțire paralelă la bază)

Enunț: Pentru a obține jumătate din aria unui triunghi printr-o linie paralelă cu baza, la ce proporție de la vârf se trasează linia?

Rezolvare:

$$\left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$$

Linia se trasează la 70.71% din înălțime de la vârf (sau 29.29% de la bază).

Exercițiul 10 (Arie la scară)

Enunț: Dacă aria pe un plan la scară 1:200 este 36 cm^2 , care este aria reală în m^2 ?

Rezolvare:

$$k = 200 \Rightarrow k^2 = 40.000$$

$$A_{real} = 36 \cdot 40.000 = 1.440.000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 10.000 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{real} = \frac{1.440.000}{10.000} = 144 \text{ m}^2$$

IV. SET DE 10 EXERCITII PENTRU ACASĂ (TEMA)

1. Poligon complex: Un teren patrulater are vârfurile A(0,0), B(25,0), C(30,20), D(10,25). Calculează aria sa.
2. Heron aplicat: Un teren triunghiular are laturile de 51 m, 52 m și 53 m. Calculează aria cu formula lui Heron.
3. Împărțire moștenire: Un teren de 1800 m^2 trebuie împărțit între 4 frați în raportul vârstelor: 1:1.5:2:2.5. Care este aria fiecărei părți?
4. Teren neregulat: Un teren hexagon se împarte în 4 triunghiuri. Ariile triunghiurilor sunt: 120 m^2 , 150 m^2 , 180 m^2 și 90 m^2 . Care este suprafața totală?
5. Linie de împărțire: Într-un triunghi cu baza de 60 m și înălțimea de 40 m, la ce distanță de vârf trebuie trasată o linie paralelă cu baza pentru a obține o arie de 600 m^2 ?
6. Verificare coordonate: Pentru un triunghi cu vârfurile (2,3), (8,4), (5,9), calculează aria cu formula coordonatelor.
7. Scară și arie reală: Pe un plan la scară 1:250, un teren ocupă 64 cm^2 . Care este aria sa reală în hectare? ($1 \text{ ha} = 10.000 \text{ m}^2$)
8. Împărțire proporțională 2: Două persoane cumpără un teren de 3200 m^2 . Prima plătește 60% din preț, a doua 40%. În ce raport trebuie împărțit terenul?
9. Triunghi mediane: Medianele unui triunghi îl împart în 6 triunghiuri de arii egale. Dacă aria totală este 300 m^2 , care este aria fiecărui triunghi mic?
10. Problemă practică: Un teren triunghiular ABC are aria 240 m^2 . Se dorește construirea unui drum XY paralel cu BC care să împartă terenul în două părți, una de 160 m^2 și alta de 80 m^2 . La ce distanță de A trebuie să fie drumul?

V. REZOLVĂRI SCHEMATICE PENTRU TEMA

1. Tabel coordonate: $\text{Suma1}=625$, $\text{Suma2}=200 \Rightarrow A = \frac{1}{2}|625 - 200| = 212.5 \text{ unități}^2$
2. $s = 78$, $A = \sqrt{78 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \sqrt{1.368.900} = 1170 \text{ m}^2$

3. Raport total = $1 + 1.5 + 2 + 2.5 = 7$; părțile: 257.14, 385.71, 514.29, 642.86 m²
4. Total = $120 + 150 + 180 + 90 = 540$ m²
5. $A_{tot} = \frac{60 \cdot 40}{2} = 1200$ m²; $\frac{A_{dor}}{A_{tot}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{600}{1200} = 0.5 \Rightarrow h' = 40\sqrt{0.5} \approx 28.28$ m de la vârf
6. Suma1=58, Suma2=71 $\Rightarrow A = \frac{1}{2}|58 - 71| = 6.5$ unități²
7. $A_{real} = 64 \cdot 250^2 = 4.000.000$ cm² = 400 m² = 0.04 ha
8. Împărțire 3:2 (corespunzător 60%:40%)
9. $300/6 = 50$ m² fiecare
10. Raport arii = $160/240 = 2/3$; $h'/h = \sqrt{2/3} \approx 0.8165$; distanța = 81.65% din înălțime de la A